I Propriétés métriques des courbes

On considère $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel E de dimension n muni de la norme $\|.\|$. Soient $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe paramétrée.

1) Longueur d'un arc de courbe

Définition 1. Soit $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ une subdivision de I, avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. On pose $L_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n+1} \left\| \overrightarrow{\gamma(a_i)\gamma(a_{i+1})} \right\|$ et $L(\gamma) = \sup_\sigma(L_\sigma(\gamma))$. Si $L(\gamma) < +\infty$, on dit que γ est rectifiable. Dans ce cas, le nombre $L(\gamma)$ sera appelé longueur de γ.

Théorème 2. *Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Alors γ est rectifiable, et on a $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.*

Corollaire 3. *On suppose $\mathcal{E}$ affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (0, e_1, \ldots, e_n)$. Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ les fonctions coordonnées de γ dans $\mathcal{R}$. Alors $L(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$*

Exemple 4 (Longueur d'un arc de cercle)**.** *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ avec $R > 0$. Alors $L(\gamma) = R(b-a)$.*

Exemple 5 (Longueur d'un arc de parabole)**.** *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (t, t^2)$. Alors :*

$$L(\gamma) = \frac{1}{2}\left(b\sqrt{1+b^2} - a\sqrt{1+a^2} + \operatorname{argsh}(b) - \operatorname{argsh}(a)\right)$$

2) Régularité d'une courbe paramétrée

Définition 6. Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe paramétrée. Pour $t_0 \in I$, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point singulier si $\gamma'(t_0) = 0$, sinon on dit que c'est un point régulier. La courbe est dite régulière si elle ne possède aucun point singulier, donc si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Exemple 7.
- *(i) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (t, t^2)$. La courbe associée (parabole) est régulière.*
- *(ii) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$. La courbe associée n'est pas régulière.*

Définition 8. Soient $\gamma_1 : I \to \mathcal{E}$ et $\gamma_2 : J \to \mathcal{E}$ avec $J = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. On dit que γ_1 et γ_2 sont $\mathcal{C}^k$-équivalentes s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : I \to J$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Exemple 9. *La courbe $\gamma_1 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ sur $]-\pi, \pi[$ et la courbe $\gamma_2 : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ sur $\mathbb{R}^\star$ sont équivalentes.*

Définition 10. Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe paramétrée. On dit que γ est paramétrée par une abscisse curviligne, ou normale, si $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$.

Proposition 11. *Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe paramétrée. Si γ est paramétrée par une abscisse curviligne, alors $L(\gamma) = b - a$.*

Théorème 12. *Toute courbe paramétrée régulière peut être paramétrée par une abscisse curviligne.*

3) Tangente à une courbe paramétrée régulière

Définition 13. Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$. La droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\gamma'(t_0))$ est appelée droite vectorielle tangente à γ en t_0. La droite affine $\gamma(t_0) + \mathrm{Vect}(\gamma'(t_0))$ est appelée droite affine tangente à γ en t_0.

Exemple 14. *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Pour $t_0 \in I$, la droite vectorielle tangente à γ en t_0 est $\mathrm{Vect}(-\sin t_0, \cos t_0)$, et la droite affine tangente à γ en t_0 est $(\cos t_0, \sin t_0) + \mathrm{Vect}(-\sin t_0, \cos t_0)$,*

4) Courbure d'une courbe paramétrée régulière

Définition 15. Soit $\gamma : I \to \mathcal{E}$ un arc de courbe paramétrée par une abscisse curviligne. On définit le courbure de γ en le paramètre $t \in I$ par $\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$.

Proposition 16. *Si $\mathcal{E}$ est euclidien de dimension 2, alors :*

$$\kappa(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Exemple 17 (Courbure d'un arc de cercle)**.** *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ avec $R > 0$. Alors $\kappa(t) = \frac{1}{R}$ pour tout $t \in I$.*

Exemple 18 (Courbure d'un arc de parabole)**.** *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\gamma : t \mapsto (t, t^2)$. Alors $\kappa(t) = (1+t^2)^{-\frac{3}{2}}$.*

II Courbes en topologie

On considère (E, d) un espace métrique.

1) Connexité et connexité par arcs

Proposition 19. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.

(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.

(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.

(iv) Toute fonction continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante.

Définition 20. Un espace métrique vérifiant l'une des assertions de la proposition précédente est dit connexe.

Remarque 21. *La connexité est une notion topologique.*

Exemple 22. $\mathbb{R}$ *est connexe,* $\{0, 1\}$ *n'est pas connexe.*

Définition 23. On appelle chemin de E toute application continue $\gamma : [0, 1] \to E$. Son image $\gamma([0, 1])$ est appelée un arc, $\gamma(0)$ son origine et $\gamma(1)$ son but. On dit que γ lie $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

Définition 24. L'espace E est dit connexe par arcs si, pour tous $a, b \in E$, il existe un chemin liant a et b.

Théorème 25. *La connexité par arcs entraîne la connexité.*

Exemple 26. *La réciproque est fausse : l'adhérence du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est connexe non connexe par arcs.*

Proposition 27. *Pour un ouvert d'un espace vectoriel normé, la connexité est équivalente à la connexité par arcs.*

2) Connexité par lignes brisées

On considère (E, d) un espace métrique.

Définition 28. Soient $a, b \in E$. On appelle segment d'extrémités a et b l'ensemble $[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda b) \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

Définition 29. On appelle ligne brisée de E joignant deux points a et b de E tout ensemble de la forme $\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$, où $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a = x_0, x_1, \dots, b = x_n \in E$.

Définition 30. Une partie A de E est dite connexe par lignes brisée si, pour tout $a, b \in A$, il existe une ligne brisée dans A joignant a et b.

Remarque 31. *Une partie connexe par ligne brisée est connexe par arcs.*

Théorème 32. *Une partie ouverte de E est connexe si, et seulement si, elle est connexe par lignes brisées.*

Corollaire 33. *Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.*

3) Homotopie des chemins et des lacets

On considère X un espace topologique. On appelle chemin dans X toute application continue $\gamma : [0, 1] \to X$.

Définition 34. On appelle chemin dans X toute application continue $\gamma : [0, 1] \to X$. Si $\gamma(0) = \gamma(1)$, on dit que γ est un lacet.

Définition 35. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans X. Une homotopie de γ_1 à γ_2 est une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ et $H(t, 1) = \gamma_2(t)$. On dira que γ_1 et γ_2 sont homotopes.

Remarque 36. *L'homotopie est une relation d'équivalence.*

Exemple 37. *Soient $\gamma_1(t) = r_1 e^{2i\pi t}$ et $\gamma_2(t) = r_2 e^{2i\pi t}$. Alors l'application $(t, u) \mapsto (ur_2 + (1 - u) r_1) e^{2i\pi t}$ est une homotopie de γ_1 à γ_2.*

Définition 38. Soit γ_1 un chemin dans X de x à y, et soit γ_2 un chemin dans X de y à z. On définit $\gamma_1\gamma_2$, appelé composée de γ_1 et γ_2, par :

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Définition 39. L'ensemble $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopies des lacets dans X de base x muni de la composition des chemins est un groupe, appelé groupe fondamental.

Proposition 40. *Si x et y sont dans la même composante connexe par arcs de X, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes.*

Exemple 41. $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \{1\}$ *et* $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

Définition 42. Si X est connexe par arcs, on dit qu'il est simplement connexe si $\pi_1(X) \cong \{e\}$.

Exemple 43. $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{S}^2$ *est simplement connexe.*

III Courbes en analyse complexe

1) Intégration sur un chemin

Définition 44. On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On parle de lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemple 45. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, alors une paramétrisation du cercle de centre z_0 et de rayon r est donnée par :*

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + re^{2i\pi t} \end{array} \right.$$

Définition 46. Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$, alors on définit :

$$\forall\, z \in \mathrm{Im}(\gamma),\ \int_\gamma f \ = \int_\gamma f(z)\, dz \ = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

Exemple 47. *Si $\gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$, alors $\int \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2i\pi$.*

2) Théorème de Cauchy

Théorème 48 (Cauchy)**.** *Soient Ω un ouvert convexe et $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, alors pour tout lacet γ de Ω, on a $\int_\gamma f = 0$.*

Exemple 49. *Si $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $\widehat{\gamma_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\gamma_{\frac{1}{4a}}$.*

Définition 50. Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. On définit l'indice $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ de a par rapport à γ par :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$$

Proposition 51. $\mathrm{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$

Théorème 52 (Formule de Cauchy)**.** *Soient Ω est un ouvert convexe, $z \in \Omega$, γ un lacet de $\Omega \setminus \{z\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors on a :*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Exemple 53. *Si γ décrit le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct, alors $\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = 0$ et $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi$.*

3) Théorème des résidus

Définition 54. On dit qu'une fonction f est méromorphe sur Ω s'il existe $A \subset \mathbb{C}$ discret et fermé tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et les points de A sont des pôles de f.

Exemple 55. *$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ est méromorphe.*

Définition 56. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, U un voisinage de z_0, et soit f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. On appelle résidu de f au point z_0 le nombre $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$, où a_{-1} est le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0.

Proposition 57. *Si z_0 est un pôle simple de $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec P, Q des polynômes tels que $P(z_0) \neq 0$, alors :*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Exemple 58. *Pour $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, $\mathrm{Res}(f,1) = 1$ et $\mathrm{Res}(f,2) = -1$.*

Théorème 59 (Théorème des résidus)**.** *Soient $S \subset \Omega$ fini, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus S)$ et γ un lacet dans Ω ne rencontrant pas S, alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{c \in S} \mathrm{Ind}_\gamma(c)\, \mathrm{Res}(f, c)$$

Exemple 60. *Soit $\alpha \in]-1,1[$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}$.*

Développements

- Transformée de Fourier d'une gaussienne (49) [El 08]
- Calcul d'une intégrale par le théorème des résidus (60) [Tau06]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[ZQ13] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod
[Rud09] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod
[El 08] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses
[Tau06] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.* Dunod